Feuille de TD

Variables aléatoires

Exercice 1.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des v.a. discrètes.

1. Montrer que $X+Y$ est une v.a. discrète.
2. Montrer que XY est une v.a. discrète.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(X)$ est une v.a. discrète.
   On pose $X(\Omega) = \{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ (avec $N = +\infty$ si $X(\Omega)$ est dénombrable), et $A_n = X^{-1}(\{x_n\})$.
4. Démontrer que $X = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$.
5. En déduire une expression de $f(X)$.
6. Pour $Y = \sum_{m=0}^{M} y_m \mathbb{1}_{B_m}$, en déduire une expression de XY.
7. Exprimer $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_X(\{x_n\})$ en fonction des A_k.
   Calculer cette somme.
8. Si l'on connaît la loi de X (la fonction $\mathbb{P}_X$), peut-on retrouver la fonction X ?

Comme X et Y sont des v.a., pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $X^{-1}(\{x\}), Y^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$. Commes X et Y sont des v.a. discrètes, on a $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ finis ou dénombrables.

1. On remarque d'abord que $(X+Y)(\Omega) \subset X(\Omega) + Y(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.
   Montrons donc que $X+Y$ est une v.a. discrète.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $(X+Y)^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega), x+y=z} (X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}))$. C'est une réunion finie ou dénombrable d'intersections d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$.
   Ainsi, $X+Y$ est une v.a. discrète.
2. On a $(XY)(\Omega) \subset \{xy,\, x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$, donc cet ensemble est fini ou dénombrable.
   Montrons donc que XY est une v.a. discrète.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $(XY)^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega), xy=z} (X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}))$.
   C'est une réunion finie ou dénombrable d'intersections d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$.
   Ainsi, XY est une v.a. discrète.
3. Comme $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, $f(X)(\Omega))$ est fini ou dénombrable.
   Montrons donc que $f(X)$ est une v.a. discrète.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $f(X)^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{x \in X(\Omega), f(x)=z} X^{-1}(\{x\})$. C'est une réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$.
   Ainsi, XY est une v.a. discrète.
4. Comme les A_n sont disjoints, la fonction $\sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$ est donc bien définie : pour tout $\omega \in \Omega$, au plus un seul terme de la somme est non-nul.
   Soit $\omega \in \Omega$. Comme $\Omega = X^{-1}(X(\Omega)) = \cup_n A_n$, il existe $n \geq 0$ tel que $\omega \in A_n$. Cela veut dire que $X(\omega) = x_n$.
   On a donc $X(\omega) = x_n = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega)$.
   Ainsi, ces deux fonctions sont égales.
5. On a $f(X) = \sum_{n=0}^{N} f(x_n) \mathbb{1}_{A_n}$.
   Cela se prouve de la même façon que la question précédente.
6. On a $XY = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} x_n y_m \mathbb{1}_{A_n \cap B_m}$.
   La fonction de droite est bien définie car pour tout $\omega \in \Omega$, au plus un seul terme est non-nul (les $A_n \cap B_m$ sont tous disjoints).
7. On a $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_X(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cup_n A_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
8. Non.
   La fonction $\mathbb{P}_X$ indique seulement la probabilité que la fonction X prenne chaque valeur $x_n \in X(\Omega)$. Cette mesure de probas n'indique pas la valeur exacte de $X(\omega)$.
   Exemple : Pour $A, B \subset \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$, les fonctions $X = \mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_{\bar{A}}$ et $Y = \mathbb{1}_B + 2\mathbb{1}_{\bar{B}}$ ont pour loi de probabilité la fonction $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}(A)\delta_1 + (1-\mathbb{P}(A))\delta_2$.
   On ne sait pas quels ω dans Ω donneront 1 et lesquels donneront 2, mais on sait que la proba que $X(\omega) = 1$ est $\mathbb{P}(A)$.
   Et c'est en fait tout ce qui nous intéresse.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Déterminer la loi de probabilité de X (*i.e.* calculer $\mathbb{P}(X=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) dans les cas suivants :

1. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n+1) = \frac{4}{n+1}\mathbb{P}(X = n).$$
2. On suppose que X ne s'annule pas et qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n) = p \cdot \mathbb{P}(X \geq n).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = n+1) = (1-p) \cdot \mathbb{P}(X = n).$$

En déduire la loi de probabilité suivie par X.

---

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0)\frac{4^n}{n!}.$$
En utilisant à nouveau le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0)\frac{4^n}{n!} = 1$ on obtient
$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-4}\frac{4^n}{n!}.$$
Donc X suit une loi de poisson de paramètre 4.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(X = n+1) = p \cdot \mathbb{P}(X \geq n) - p \cdot \mathbb{P}(X \geq n+1) = p \cdot \mathbb{P}(X = n)$$
D'où la relation de récurrence
$$\mathbb{P}(X = n+1) = (1-p)\mathbb{P}(X = n).$$
Par récurrence $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}\mathbb{P}(X = 1)$.
Enfin, on a l'égalité :
$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{p}.$$
D'où
$$\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$$
Donc X suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 3. Soit $p \in]0,1[$. On considère un jeu de Pile ou Face, avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux.
Soit $n \geq 1$. On note X_n la v.a. qui donne le nombre de Pile obtenus avec les n premiers lancers.
On note Y la v.a. qui donne le nombre de lancers effectués pour obtenir le premier Face, avec $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais Face.

1. Donner l'ensemble image des v.a. X_n, et calculer leur lois de probabilités.
2. Calculer leur espérance $\mathbb{E}(X_n)$.
3. Donner l'ensemble image de la v.a. Y, et calculer $\mathbb{P}(Y = n)$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(Y < +\infty) = 1$.
5. En déduire que l'on peut considérer Y comme une v.a. réelle, et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
6. Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = Y^{-1}(\{n\})$.
Les événements A_n sont-ils indépendants ?
7. On définit la v.a. $X_Y : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $X_Y(\omega) = X_{Y(\omega)}(\omega)$ si $Y(\omega) < +\infty$, et $+\infty$ sinon.
Trouver une relation entre X_Y et Y.

---

1. La v.a. X_n est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.
Pour $0 \leq k \leq n$, on a $\mathbb{P}(X_n^{-1}(\{k\})) = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
Obtenir k Pile exactement avec n lancers, c'est choisir k positions parmi n, faire Pile à ces k positions, et faire Face aux $n-k$ autres positions.
2. On a $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$. On utilise $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour obtenir cette égalité.
On verra plus tard dans le cours une autre façon d'obtenir ce résultat.
3. L'ensemble image de Y est $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
On a $\mathbb{P}(Y = n) = p^{n-1}(1-p)$, car les lancers sont tous indépendants.
4. On a $\mathbb{P}(Y < +\infty) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n \geq 1} p^{n-1}(1-p) = \frac{1-p}{1-p} = 1$.
5. On a alors $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$. Cela veut dire que presque sûrement, la v.a. Y est à valeurs finies. Les évènements de probabilité nulle sont "invisibles" quand on calcule des probabilités ou des espérances.
On a alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n \geq 1} np^{n-1}(1-p) = (1-p)\sum_{k \geq 0} p^k(k+1) = \frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p}$.
6. Ces événements sont disjoints, et tous de probabilité non-nulle. Ils ne sont donc pas indépendants.
On a $\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = 0 \neq \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m)$.
7. Si $Y(\omega) = n$, les $n-1$ premiers lancers ont donné Pile. Donc, on a $X_Y(\omega) = X_n(\omega) = n-1$.
Si $Y(\omega) = +\infty$, on a $X_Y(\omega) = +\infty$.
On remarque donc que $X_Y = Y - 1$.

Exercice 4. Un sportif tente de franchir en sautant des hauteurs successives numérotées 1, ... , n,... .

On suppose que tous les sauts sont indépendants les uns des autres, et que la probabilité de franchir la hauteur numéro n est de $\frac{1}{n}$.
On pose X la v.a. qui indique la dernière hauteur franchie avant le premier échec.
Quelle est le domaine d'arrivée de la v.a. X ?
Montrer que la v.a. X est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement.
Déterminer la loi de probas de X.
Calculer $\mathbb{E}(X)$.

• La fonction X est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On a $X : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ (on ne connaît pas exactement l'ensemble Ω, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse).
• Pour montrer que X est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement, il faut montrer que $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.
Pour tout $i \geq 1$ on pose A_i : "le saut ni est réussi".
On a alors $(X = +\infty) = \cap_{i \geq 1} A_i$.
Ainsi, par indépendance de la famille des (A_i), on a : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \Pi_{i\geq 1} \frac{1}{i} = 0$.
• Déterminer la loi de probas de X, c'est calculer les probabilités $\mathbb{P}(X^{-1}(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$, pour tout $k \geq 1$ (et pour $+\infty$, mais on l'a déjà calculée).
Pour tout $i \geq 1$ on pose A_i : "le saut ni est réussi".
Alors, on a $X^{-1}(\{k\}) = A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$.
Comme les sauts sont indépendants, les évènement A_i sont mutuellement indépendants. Cela donne donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

• La série $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k \frac{k}{(k+1)!}$ est une série à termes positifs, qui est convergente.
En écrivant $k^2 = k(k+1) - k = (k+1)k - (k+1) + 1$, qui donne $\frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}$, on obtient que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k \frac{k}{(k+1)!} = e - 1$..

Exercice 5. (*) Soit $p \in]0, 1[$. On considère un jeu de Pile ou Face (on associe 1 à Pile et 0 à Face), où on lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux, et qu'il y a probabilité p de faire Pile.
Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le résultat du lancer numéro n. Ce sont des v.a. discrètes.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $A_n = \{X_{n-1} \neq X_n\}$.
   Les événements A_n sont-ils indépendants ?
   Discuter selon la valeur de p.
2. On définit la v.a. $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ par $T(\omega) = \inf\{n \text{ t.q. } X_{n-1}(\omega) \neq X_n(\omega)\}$ si cet ensemble est non vide, et $T(\omega) = +\infty$ sinon.
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(T = n)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3. On définit la v.a. $X_T : \Omega \to \{0, 1\}$ par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.
   Pour quelles valeurs de p a-t-on

$$\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (1, 0)) = \mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (0, 1))?$$

---

1. On a $(X_{n-1} \neq X_n) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n-1} = 0) \cup \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n-1} = 1)$ dont on déduit

$$\mathbb{P}(A_n) = 2p(1-p).$$

De plus,

$$A_n \cap A_{n-1} = (X_n = 0, X_{n-1} = 1, X_{n+1} = 1) \cup (X_n = 1, X_{n-1} = 0, X_{n+1} = 0)$$

Dont on déduit

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1}) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p).$$

Comme $\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n-1}) = 4p^2(1-p)^2$, on en déduit que nécessairement $p = \dfrac{1}{2}$, et alors deux A_k adjacents sont indépendants. On montre de même que pour r ensembles A_{k_i}, $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^r.$$

On procéde par récurrence sur r :
Initialisation : le résultat est déjà prouvé pour $r = 1$ (ici $p = \dfrac{1}{2}$)
Supposons la propriété vraie pour $r \geq 2$ et soit $r+1$ ensembles A_{k_i}, $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{r+1}$.
1/ Si $k_{r+1} - k_r \geq 2$, alors $A_{k_{r+1}}$ s'exprime en fonction de $X_{k_{r+1}-1}$ et $X_{k_{r+1}}$ tandis que $\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i}$ s'exprime en fonction de X_1, ..., X_{k_r}. Or pr hypothèse les lancers en $k_{r+1} - 1$ et k_{r+1} sont indépendants des lancers précédents, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap A_{k_{r+1}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i}\right) \times \mathbb{P}(A_{k_{r+1}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^r \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}.$$

2/ Si $k_{r+1} = k_r + 1$, alors

$$\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i} = \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 0, X_{k_r+1} = 1)\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 1, X_{k_r+1} = 0)\right)$$

Mais par hypothèse, $\bigcap_{i=1}^r A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 0)$ est indépendant de $(X_{k_r+1} = 1)$ et même chose pour les évènements complémentaires. On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r}=0)\right)\mathbb{P}\left(X_{k_r+1}=1\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r}=1)\right)\mathbb{P}\left(X_{k_r+1}=0\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r}=0)\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r}=1)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}
\end{aligned}$$

2. (a) Pour $n \geq 2$, il vient $\mathbb{P}(T=n) = p^{n-1}(1-p) + (1-p)^{n-1}p$.
   (b) $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(T=n) = (1-p)\sum_{n\geq 1} p^n + p\sum_{n\geq 1}(1-p)^n = 1$.
3. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (0,1)) &= \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}((X_n, X_{n+1}) = (0,1), T=n)) \\
&= \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_{n-1} = 1, X_n = 0, X_{n+1} = 1) \\
&= \sum_{n\geq 2} (1-p)p^n = p^2
\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (1,0)) = (1-p)^2$ et on trouve $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6. Une famille a deux enfants. L'un des enfants est un garçon.
Quelle est la probabilité que le plus jeune soit un garçon ?
Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

On suppose qu'un enfant est soit un garçon G soit une fille F, et qu'il y a probabilité $1/2$ que l'enfant soit G ou soit F.
On suppose de plus que les sexes de chaque enfant sont des événements indépendants.
On veut considérer l'âge des enfants (le plus jeune, le plus vieux), donc il faut les ordonner.
Donc, le modèle probabiliste qui représente la situation est $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{G, F\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la mesure de probas uniforme.
On veut calculer $\mathbb{P}(A|B)$ avec $A = \{(G,F),(G,G)\}$ et $B = \{(G,F),(F,G),(G,G)\}$ (le plus jeune est un garçon, sachant que l'un des enfants est un garçon).
On obtient $\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{3}$.

Exercice 7. A un jeu télévisé, on met 1 voiture et 2 chèvres derrière 3 portes.
Le candidat doit choisir une porte, et il gagne ce qu'il y a derrière.
Un candidat choisit une porte. Le présentateur ouvre alors une autre porte, qui cachait une chèvre.
Le présentateur propose au candidat de changer de porte, pour gagner ce qu'il y a derrière.
Le candidat doit-il garder sa porte, ou changer pour l'autre porte ?
Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

On suppose que les portes sont numérotées, pour les distinguer. On note V la voiture, et C les chèvres.
On suppose que la voiture et les chèvres sont répartis derrière les portes de façon uniforme.
On peut supposer que le candidat choisit au hasard uniforme sa porte. Pour l'ordre des portes, on peut donc supposer qu'il choisit la porte no.1.
Le présentateur ouvre la porte no.2 ou la porte no.3 (une porte qui contient une chèvre C).
La porte restante est alors la porte no.3 ou la porte no.2. L'espace probabilisé qui modélise cet énoncé est $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{(V,C,C),(C,V,C),(C,C,V)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la mesure de probas uniforme.
Il y a 3 situations possibles toutes avec la même probabilité.
Avec (V,C,C) le candidat gagne la voiture en gardant la porte no.1.
Avec (C,V,C) ou (C,C,V), le candidat gagne la voiture en changeant de porte.
Donc, le candidat doit toujours changer de porte, car cela lui donne une probabilité de $\frac{2}{3}$ de gagner la voiture.

Exercice 8. (*) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
• On suppose que X, Y sont intégrables.
Est-ce que XY est toujours intégrable ?
On suppose de plus que pour tous $x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$, les événements $X^{-1}(\{x\})$ et $X^{-1}(\{y\})$ sont indépendants.
Montrer alors que XY est intégrable, et que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

• Non.
Prenons en contre-exemple la v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ donnée par la loi de probas

$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}_X(\{n\})=\frac{a}{n^3}$, avec $a=\frac{1}{\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}}$.
Cela définit bien une mesure de probas car $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_X(\{n\})=1$.
On a alors $\mathbb{E}(X)=a\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<+\infty$, mais $\mathbb{E}(X^2)=a\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=+\infty$.
Donc X^2 n'est pas intégrable.
• On a $\mathbb{E}(|XY|)=\mathbb{E}(|X||Y|)=\sum_{x\in X(\Omega),y\in Y(\Omega)}|x||y|\mathbb{P}(X=x,Y=y)$.
Or, par indépendance d'événements, on a $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$.
On obtient donc, par sommabilité et par produit de séries, que $\mathbb{E}(|X||Y|)=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}|x|\mathbb{P}(X=x)|y|\mathbb{P}(Y=y)=(\sum_{x\in X(\Omega)}|x|\mathbb{P}(X=x))(\sum_{y\in Y(\Omega)}|y|\mathbb{P}(Y=y))=\mathbb{E}(|X|)\mathbb{E}(|Y|)<+\infty$.
Ainsi, la v.a. XY est intégrable.
Le même calcul de produit de Cauchy montre que $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 9. On lance deux dés équilibrés de façon indépendante. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.
On pose $X=\min(U_1,U_2)$ et $Y=\max(U_1,U_2)$.

1. Donner la loi de probas X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X+Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
   On pourra utiliser l'exercice précédent.

---

1. Pour $i=1,\ldots,6$, l'événement $X=i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
   — A : $U_1=i$ et $U_2=i$;
   — B : $U_1=i$ et $U_2>i$;
   — C : $U_1>i$ et $U_2=i$.

   Par indépendance des des résultats entre les deux dés, on en déduit que
   $$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{36},\ \mathbb{P}(B)=\frac{6-i}{36}\text{ et }\mathbb{P}(C)=\frac{6-i}{36}.$$
   Il vient $\mathbb{P}(X=i)=\dfrac{1+2(6-i)}{36}$ et donc : $\mathbb{P}(X=1)=11/36$, $\mathbb{P}(X=2)=9/36$, $\mathbb{P}(X=3)=7/36$, $\mathbb{P}(X=4)=5/36$, $\mathbb{P}(X=5)=3/36$, $\mathbb{P}(X=6)=1/36$. On en déduit $E(X)=91/36$.
2. On a $X+Y=U_1+U_2$ car (U_1,U_2) est une permutation de (X,Y). Il vient $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=E(U_1)+E(U_2)=7$, puisque chaque U_i a une loi de probas uniforme sur $\{1,\ldots,6\}$, son espérance vaut $(6+1)/2=7/2$.
   On en déduit $E(Y)=161/36$.
3. On a $XY=U_1U_2$. On en déduit d'après l'exercice précédent que
   $$E(XY)=E(U_1U_2)=E(U_1)E(U_2).$$
   D'où
   $$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1225}{1296}.$$

Exercice 10. Pour X une v.a. discrète de carré intégrable, on appelle v.a. centrée de X la v.a. $Y=X-\mathbb{E}(X)$.
Si $Var(X)\neq 0$, on appelle v.a. réduite de X la v.a. $Z=\frac{X}{Var(X)}$.
Soit $p\in]0,1[$. Soit X une v.a. de Bernouilli de paramètre p. Déterminer X^*, la v.a. centrée réduite de X.

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre a, on a $\mathbb{E}(X)=a$ et $\mathrm{Var}(X)=a(1-a)$.
Donc
$$X^*=\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X}}=\frac{X-a}{\sqrt{a(1-a)}}.$$
Lorsque $X=1$, on a $X^*=\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}=\alpha$.
Lorsque $X=0$, on a $X^*=\sqrt{\dfrac{a}{1-a}}=\dfrac{1}{\alpha}$.
Donc $X^*(\Omega)=\{-1/\alpha,\alpha\}$,
et $\mathbb{P}(X^*=\alpha)=\mathbb{P}(X=1)=a$ et $\mathbb{P}(X^*=-1/\alpha)=\mathbb{P}(X=0)=1-a$.

Exercice 11. Calculer $\mathbb{P}(X<E(X))$ si X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X)\notin\mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X)=2\mathrm{Var}\,(X)$.

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et a, on sait que $\mathbb{E}(X)=na$ et $\mathrm{Var}\,(X)=na(1-a)$.
Donc l'égalité $\mathbb{E}(X)=2\mathrm{Var}\,(X)$ se traduit par
$$na=2na(1-a),$$
et donc $a=1/2$ et $\mathbb{E}(X)=n/2$.
Comme $n/2$ n'est pas un entier, on écrit $n=2\alpha+1$.
On a ainsi
$$\mathbb{P}(X<n/2)=\sum_{k=0}^{\alpha}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{\alpha}\frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$
En faisant le changement d'indice de sommation $j=n-k$, on a
$$\mathbb{P}(X<n/2)=\sum_{j=n-\alpha}^{n}\frac{\binom{n}{n-j}}{2^n},$$

mais puisque $n-\alpha=\alpha+1$,

$$\mathbb{P}(X<n/2)=\sum_{j=n-\alpha}^{n}\frac{\binom{n}{j}}{2^n}=\mathbb{P}(X>n/2).$$

Puisque $\mathbb{P}(X=n/2)$ est nulle, on a

$$\mathbb{P}(X<n/2)+\mathbb{P}(X>n/2)=1,$$

et on en déduit

$$\mathbb{P}(X<n/2)=\frac{1}{2}$$

Exercice 12. On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle
   $\mathbb{P}(X=k|Y=n)$. (On distinguera les cas $k\leq n$ et $k>n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y=i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

---

1. Pour un objet pris à la sortie, $\mathbb{P}(A)=0.6$ et $\mathbb{P}(B)=0.4$ Soit $D=$"l'objet est défectueux". On a $\mathbb{P}(D|A)=0.1$ et $\mathbb{P}(D|B)=0.2$ et comme (A,B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(D|B)\,\mathbb{P}(B)\\ &= 0.1\cdot 0.6+0.2\cdot 0.4\\ &= 0.14.\end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probababilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" est $\mathbb{P}(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|D) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap D)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{\mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)}\\ &= \frac{0.1\cdot 0.6}{0.14}=\frac{0.06}{0.14}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}.\end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) On a $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout entier n : $\mathbb{P}(Y=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y)=\lambda=20$ et $V(Y)=\lambda=20$
   (b) Quand $Y=n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n, qui sont défectueux **indépendemment** les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y=n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,0.1)$ et $\mathbb{P}(X=k|Y=n)=0$ si $k>n$ et $P(X=k|Y=n)=\binom{n}{k}0.1^k0.9^{n-k}$ si $k\leq n$
   (c) Comme $(Y=n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k|Y=n)\,\mathbb{P}(Y=n)$$

série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que

$n \geq k$ ou $n < k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{M} \mathbb{P}(X=k|Y=n)\,\mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X=k|Y=n)\,\mathbb{P}(Y=n) \\
&\quad + \sum_{n=k}^{M} \mathbb{P}(X=k|Y=n)\,\mathbb{P}(Y=n) \\
&= 0 + \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\
&= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!\,(n-k)!n!} (0.9\cdot 20)^n \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{M} \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\
&\to \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}
\end{aligned}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

Exercice 13. (*)

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n).$$
   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$ est convergente.
   Montrer que X est d'espérance finie.
   (c) Réciproquement, on suppose que X est d'espérance finie.
   Montrer alors que $\big(n\mathbb{P}(X>n)\big)_n$ tend vers 0, que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$ converge, et que
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k).$$
2. **Application :** Soient $N, n \geq 1$.
   On prend une urne avec N boules identiques au toucher, numérotées de 1 à N.
   On fait n tirages de boules avec remise. Tous les tirages sont indépendants les uns des autres.
   On note X la v.a. qui donne le plus grand numéro obtenu lors des n tirages.
   (a) Soit $1 \leq k \leq N$. Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$?
   En déduire la loi de probas de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\dfrac{k}{N})^n)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$). Calculer cette limite.
   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N} = \dfrac{n}{n+1}$.
3. Montrer que si X est de carré intégrable, alors
   $$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X>k).$$

---

1. (a) Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k(\mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k)) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1-k)\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n) + \mathbb{P}(X>0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n).
\end{aligned}$$

   (b) On a, pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$. La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.
   (c) Si X admet une espérance, la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge. Mais :
   $$0 \leq n\mathbb{P}(X>n) = n \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k).$$
   Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$.

(d) i. On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = (\frac{k}{N})^n \implies \mathbb{P}(X > k) = 1 - (\frac{k}{N})^n.$$

Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

ii. Par la question précédente : $\mathbb{E}(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^n$.

iii. On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

iv. On a :

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^n \to 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

(e) On utilise le même type d'argument :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 (\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)\mathbb{P}(X > k) - n^2 P(X > n).$$

Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2 P(X = k)$ converge. Mais :

$$0 \leq n^2 P(X > n) = n^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 P(X = k).$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X > k).$$

Exercice 14. Soit $n \geq 2$. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé.
Soient $X_{,1}, X_2 : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ deux v.a. qui sont indépendantes et qui ont toutes deux comme loi la mesure de probas uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Soit $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On note Y la v.a. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \; Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probas de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, et la comparer à $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle minimale ? maximale ?

---

1. On a $Y(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$, et par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :
   — si $k \leq a$, $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) = \frac{1}{n} \times \frac{a}{n}$.
   — si $k > a$, $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) + P((X_2 = k) \cap (X_2 > a)) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}$.

   On a bien $a \times \frac{a}{n^2} + (n-a) \times \left(\frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 1$.
2. Le calcul de l'espérance donne :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{a} k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n} \\ &= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) \geq E(X_1). \end{aligned}$$

3. Avec l'expression précédente, on voit que $\mathbb{E}(Y)$ est minimale pour $a = 0$ ou $a = n$. Pour la valeur maximale, on réécrit l'espérance avec des identités remarquables. On vérifie que :

$$E(Y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{5}{4}n^2 + n - (a - n/2)^2\right).$$

   Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a - n/2|$ le plus petit possible :
   — si n est pair, c'est pour $a = n/2$.
   — si n est impair, c'est pour $a = (n-1)/2$ ou $a = (n+1)/2$.

Exercice 15. (*) Soient $n, m \geq 1$. Dans un jeu, n candidats doivent traverser un pont à m planches.
Pour chaque planche, une moitié est robuste, tandis que l'autre moitié est très fragile. Les deux moitiés sont identiques à l'oeil.
Si un candidat marche sur la mauvaise moitié d'une planche, il a perdu. S'il traverse les m planches, il a gagné.
Les candidats vont sur le pont l'un après l'autre, et le pont reste le même entre chaque candidat.
Le candidat no.2 peut donc voir où le candidat no.1 a marché, et suivre ses pas (et éviter la moitié fragile si le candidat no.1 a perdu).
On note $X_k : \Omega \to \{1, \ldots, m+1\}$ la v.a. qui indique la progression du candidat numéro k. Elle vaut $1 \leq r \leq m$ si le candidat perd à la planche no.r, et $m+1$ si le candidat traverse tout le pont.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = r)$, $1 \leq r \leq m$ et $\mathbb{P}(X_1 = m+1)$.
2. Soient $1 \leq r, s \leq m+1$. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r)$.
   On pourra distinguer des cas.
3. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = s)$, pour $2 \leq s \leq m$ et $s = m+1$.
4. Soient $1 \leq r < s \leq m$. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r)$. Que trouve-t-on ?
   On pourra utiliser des probabilités conditionnelles.
5. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1 | X_2 = m+1)$.
   En déduire $\mathbb{P}(X_3 = m+1)$.
6. Trouver une expression générale de $\mathbb{P}(X_k = m+1)$, pour $k \geq 1$.
   On pourra s'aider des questions précédentes.
   Quelle méthode peut-on utiliser pour démontrer cela ?
7. Pour quelles valeurs de $k \geq 1$ a-t-on $\mathbb{P}(X_k = m+1) \geq \frac{1}{2}$?
8. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
   Montrer que $\mathbb{E}(X_1) \leq 2$ et que cette espérance converge vers 2 quand $m \to +\infty$.

On suppose que chaque choix de chaque candidat est avec une mesure de probas uniforme (proba $\frac{1}{2}$ de marcher sur la bonne moitié, et $\frac{1}{2}$ de marcher sur la mauvaise moitié).
On suppose que tous ces choix sont indépendants les uns par rapport aux autres.
On suppose que le candidat $k+1$ va toujours se souvenir des pas du candidat k.
Si le candidat k a perdu à la planche no.r, il pourra ainsi marcher sans soucis jusqu'à la planche no.r et tenter la planche no.$r+1$.
Et si le candidat k a traversé le pont, alors le candidat $k+1$ pourra lui aussi traverser le pont.

1. Pour $1 \leq r \leq m$, on a $\mathbb{P}(X_1 = r) = \frac{1}{2}^r$. On a $\mathbb{P}(X_1 = m+1) = \frac{1}{2}^m$.
2. Si $1 \leq r \leq m$ et $s \leq r$, on a $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r) = 0$.
   Si $1 \leq r \leq m$ et $r < s \leq m$, on a $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r) = \frac{1}{2}^{s-r}$.
   Si $1 \leq r \leq m$ et $s = m+1$ on a $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r) = \frac{1}{2}^{m-r}$.
   Si $r = m+1$ et $s < r$ on a $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = m+1) = 0$, et $\mathbb{P}(X_2 = m+1 | X_1 = m+1) = 1$.
3. Les événements $(X_1 = r)$ forment une partition de Ω. On a donc
   $\mathbb{P}(X_2 = m+1) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = m+1, X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = m+1 | X_1 = r)\mathbb{P}(X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{2}^{m-r} \frac{1}{2}^r + 1.\frac{1}{2}^m = \frac{m+1}{2^m}$.
   Pour $2 \leq s \leq m$, on a
   $\mathbb{P}(X_2 = s) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = s, X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r)\mathbb{P}(X_1 = r) = \sum_{r=1}^{s-1} \frac{1}{2}^{s-r} \frac{1}{2}^r = \frac{s-1}{2^s}$.
4. On utilise la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r) = \mathbb{P}(X_3 = m+1 | X_2 = s, X_1 = r)\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r)\mathbb{P}(X_1 = r) = \frac{1}{2}^{m-s} \frac{1}{2}^{s-r} \frac{1}{2}^r = \frac{1}{2}^m$.
5. On a $\mathbb{P}(X_3 = m+1 | X_2 = m+1) = 1$.
   Les événements $(X_2 = m+1)$ et $(X_2 = s, X_1 = r)$ $(1 \leq r < s \leq m)$ forment une partition de Ω.
   On a donc $\mathbb{P}(X_3 = m+1) = \mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = m+1) + \sum_{1 \leq r < s \leq m} \mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r) = 1.\frac{m+1}{2^m} + \sum_{1 \leq r < s \leq m} \frac{1}{2^m} = \frac{1+m+\binom{m}{2}}{2^m}$.
6. Avec les questions précédentes, on peut généraliser l'idée pour calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1)$ au joueur numéro k : $\mathbb{P}(X_k = m+1) = \frac{1}{2^m}(\sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r})$.
   En effet, soit le joueur $k-1$ a traversé le pont, auquel cas $\mathbb{P}(X_k = m+1, X_{k-1} = m+1) = \mathbb{P}(X_{k-1} = m+1)$.
   Soit, le joueur $k-1$ a perdu. Donc tous les joueurs $1, \dots, k-1$ ont perdu, chacun à une planche $r_1, \dots, r_{k-1}$.
   Et, avec la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(X_k = m+1, X_{k-1} = r_{k-1}, \dots, X_1 = r_1) = \frac{1}{2}^{m-r_{k-1}} \dots \frac{1}{2}^{r_1} = \frac{1}{2^m}$.
   Il s'agit alors de compter le nombre de telles situations. Il y en a $\binom{m}{k-1}$.
   Une preuve par récurrence sur k permet alors d'obtenir le résultat.
7. Avec $\mathbb{P}(X_k = m+1) = \frac{1}{2^m}(\sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r})$ et avec les propriétés des coefficients binomiaux (positifs, et symétriques par rapport à $\frac{m}{2}$), on en déduit que $\mathbb{P}(X_k = m+1) \geq \frac{1}{2}$ quand $k \geq \frac{m}{2}$.
   Si m est impair, on a même $\mathbb{P}(X_k = m+1) = \frac{1}{2}$ pour $k = \frac{m+1}{2}$.
8. On a $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{r=1}^{m+1} r\mathbb{P}(X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m} \frac{r}{2^r} + \frac{m+1}{2^m}$.
   Par découpage et réordonnement, on a
   $\sum_{r=1}^{m} \frac{r}{2^r} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{2^r} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=s}^{m} \frac{1}{2^k} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\frac{1}{2^s} - \frac{1}{2^{m+1}}}{1-\frac{1}{2}}$.
   $\sum_{r=1}^{m} \frac{r}{2^r} = \sum_{s=1}^{m} \frac{2}{2^s} - \frac{2}{2^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} - \frac{m}{2^m} = 2 - \frac{2}{2^m} - \frac{m}{2^m} = 2 - \frac{m+2}{2^m}$.
   Donc, $\mathbb{E}(X_1) = 2 - \frac{1}{2^m}$.
   On a donc bien $\mathbb{E}(X_1) \leq 2$ et $\mathbb{E}(X_1) \to_{m \to +\infty} 2$.

Exercice 16. Soient α, $\beta \in]0, 1[$. On pose

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(i, j) \mapsto \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j.$$

1. Vérifier que la famille $\big(g(i,j)\big)_{(i,j)}$ définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Sur $\left(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}\big(\mathbb{N}\big)^2, \mathbb{P}\right)$, on note $X, Y : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ deux v.a. discrètes définies par

$$X(i,j) = i, \; Y(i,j) = j, \; \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

Donner les lois de probas de X et Y.
Retrouver des lois de probas usuelles.

3. Calculer

   (a) $\mathbb{P}(X = Y)$,

   (b) $\mathbb{P}(X > Y)$.

4. Soit $Z : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ la v.a. discrète définie par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ Z(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

---

1. Pour tout $i,\, j \in \mathbb{N}$, $\alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j \in [0,1]$ car $\alpha,\, \beta \in]0,1[$ et la somme sur i puis la somme sur j existent car ce sont des séries géométriques de raison $1-\alpha$, $1-\beta \in]0,1[$ et donc la famille est sommable (à termes positifs). On obtient :

$$\alpha\beta\sum_{j=0}^{+\infty}(1-\beta)^j\left(\sum_{i=0}(1-\alpha)^i\right) = \alpha\beta\frac{1}{1-(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{+\infty}(1-\beta)^j = \frac{\beta}{1-(1-\beta)} = 1.$$

La loi $\big((i,j), g(i,j)\big)$ définit bien une loi de probabilité.

2. $\mathbb{P}(X = i) = \alpha\beta(1-\alpha)^i\sum_{j=0}^{+\infty}(1-\beta)^j = \alpha(1-\alpha)^i$, on reconnait une loi géométrique ; de même pour Y.

3. (a) $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{+\infty}(X = Y = i)$. Par σ-additivité les événements $(X = Y = i)$ étant deux à deux disjonts :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = Y = i) = \alpha\beta\sum_{i=0}^{+\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i = \frac{\alpha\beta}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$$

   (b) $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\left[\bigcup_{j=0}^{i-1}(X = i, y = j)\right]\right)$. Les événements sont encore deux à deux disjoints et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > Y) &= \alpha\beta\sum_{i=1}^{+\infty}\left((1-\alpha)^i\sum_{j=0}^{i-1}(1-\beta)^j\right) \\
&= \alpha\beta\sum_{i=1}^{+\infty}\left((1-\alpha)^i\frac{1-(1-\beta)^i}{1-(1-\beta)}\right) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\alpha)^i - \alpha\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i \\
&= 1-\alpha-\alpha(\frac{1}{\alpha+\beta-\alpha\beta}-1) \\
&= 1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha\beta}
\end{aligned}$$

On a de même $\mathbb{P}(X < Y) = 1 - \dfrac{\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$ et on verifie que

$$\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > y) = 1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} + 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha\beta} + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} = 1.$$

4. Z est bornée donc intégrable. De plus $\mathbb{N}^2 = 2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N}+1) \cup (2\mathbb{N}+1\times 2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N}+1\times 2\mathbb{N}+1)$ l'union étant disjointe.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k,k'=0}^{+\infty} 1\times\alpha\beta(1-\alpha)^{2k}(1-\beta)^{2k'} + \sum_{k,k'=0}^{+\infty}(-1)\times\alpha\beta(1-\alpha)^{2k+1}(1-\beta)^{2k'+1} \\
&= \frac{\alpha\beta}{1-(1-\alpha)^2}\times\frac{1}{(1-\beta)^2} - (1-\alpha)(1-\beta)\frac{\alpha\beta}{1-(1-\alpha)^2}\times\frac{1}{(1-\beta)^2} \\
&= \frac{1}{(2-\alpha)(2-\beta)} - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{2-\alpha)(2-\beta)} \\
&= \frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{(2-\alpha)(2-\beta)}
\end{aligned}$$

Exercice 17. Soit $p \in]0,1[$. Une personne fait 12 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité p de faire Pile.
Une deuxième personne fait 36 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité $\frac{p}{3}$ de faire Pile. On note X la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la première personne, et Y la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la deuxième personne.
• Décrire les v.a. X, Y (image, loi de probas, espérance, variance)
• On se demande si l'on a plus souvent $X > Y$ ou $Y < X$. Quelle(s) quantité(s) faut-il calculer pour le savoir ?

• X est une v.a. binomiale de paramètres 12 et p. Son image est donc $\{0,\dots,12\}$. On a $\mathbb{P}(X=k)=\binom{12}{k}p^k(1-p)^{12-k}$ pour $0\le k\le 12$, et $\mathbb{E}(X)=12p$. On a $Var(X)=12p(1-p)$. Y est une v.a. binomiale de paramètres 36 et $\frac{p}{3}$. Son image est donc $\{0,\dots,36\}$. On a $\mathbb{P}(X=k)=\binom{36}{k}\frac{p}{3}^k(1-\frac{p}{3})^{36-k}$ pour $0\le k\le 36$, et $\mathbb{E}(X)=36\frac{p}{3}=12p$. On a $Var(Y)=36\frac{p}{3}(1-\frac{p}{3})=12p(1-\frac{p}{3})$.
Les v.a. X et Y ont la même espérance.
• Il faut calculer $\mathbb{P}(X>Y)$ et $\mathbb{P}(X=Y)$.
Si X et Y sont indépendantes, on a $\mathbb{P}(X>Y)=\sum_{k=1}^{12}\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{P}(X=k,Y=m)=\sum_{k=1}^{12}\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=m)$.
Si X et Y sont indépendantes, on a $\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=0}^{12}\mathbb{P}(X=k,Y=k)=\sum_{k=0}^{12}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)$.
Il n'est pas facile de simplifier ces sommes à la main. C'est dans ces moments qu'il est intéressant de demander de l'aide à l'ordinateur pour terminer les calculs (et avoir une valeur approchée).

Exercice 18. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des loi géométrique de paramètres respectifs $p_1>0$ et $p_2>0$.
Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit inversible ?

$$A=\begin{pmatrix} X & Y\\ Y & X\end{pmatrix}$$

La probabilité que A soit inversible est égal à la probabilité que le déterminent X^2-Y^2 de A soit non nul. Or X et Y sont tous les deux positifs. Donc $X^2-Y^2=0$ si, et seulement si, $X=Y$. On a donc :

$$\begin{aligned}
P(X^2-Y^2\neq 0) &= 1-P(X^2-Y^2=0)\\
&= 1-P(X=Y)\\
&= 1-\left(\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k,Y=k)\right)\\
&= 1-\left(\sum_{k=0}^{+\infty}p_1p_2((1-p_1)(1-p_2))^{k-1}\right)\\
&= 1-\frac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}
\end{aligned}$$

Exercice 19. On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard uniforme une boîte, puis une boule dans la boîte.
Soient X,Y les v.a. associées au numéro de la boîte et au numéro de la boule.

1. Déterminer la loi de probas de la v.a. (X,Y).
2. Déterminer la loi de probas de Y, et donner son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

---

1. Remarquons d'abord que (X,Y) prend ses valeurs dans $\{1,\dots,n\}^2$. En outre :
$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=P(X=i)P(Y=j|X=i).$$
On a donc :
$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\begin{cases}0 & \text{si } i<j\\ \frac{1}{n}\times\frac{1}{i} & \text{si } i\ge j.\end{cases}$$
2. Y est une loi marginale du couple (X,Y). On a donc :
$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{n}P\big((X=i)\cap(Y=j)\big).$$
On en déduit :
$$P(Y=j)=\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}.$$
Le calcul de l'espérance donne :
$$E(Y)=\sum_{j=1}^{n}jP(Y=j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}.$$
On permute les sommes. En cas de difficultés, il est conseillé de représenter les sommes sous forme d'un tableau (triangulaire). On obtient :
$$\begin{aligned}
E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1)\\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

3. Il est facile de vérifier que $P(Y=2)\neq 0$, et bien sûr on a $P(X=1)=\frac{1}{n}\neq 0$. On en déduit que
$$P(X=1)P(Y=2)\neq 0.$$
Or, on a prouvé que $P\big((X=1),(Y=2)\big)=0$. Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
4. L'événement $(X=Y)$ est réalisé si, et seulement si, X et Y prennent les mêmes valeurs. On a donc :
$$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{n}P\big((X=i),(Y=i)\big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Exercice 20.
• Calculer la fonction génératrice d'une v.a. X dont la loi de probas est la loi uniforme sur $\{1,\dots,12\}$.
• On prend deuxs dé à 6 faces, que l'on truque. On lance ces dés, de façon indépendante.
Soient X_1, X_2 les v.a. associées au résultats de chaque dé.
Ecrire la fonction génératrice de X_1+X_2 en fonction des lois de probas $(p_1,\dots,p_6)$ et $(q_1,\dots,q_6)$ de X_1 et de X_2.
• Peut-on truquer deux dés à 6 faces de sort que la somme des faces obtenues en lançant les dés ait une loi de probas uniforme ?

• Pour S une v.a. de loi de probas uniforme que $\{1,\dots,12\}$, on a
$$G_S(s)=\sum_{k=2}^{12}\frac{1}{11}s^k=\frac{s^2}{11}\frac{1-s^{11}}{1-s}\quad (s\neq 1),$$
et $G_S(1)=1$.
• Les jets des dés sont indépendants, donc X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc, $G_{X_1+X_2}=G_{X_1}G_{X_2}$.
On a $G_{X_1}(s)=s(p_1+p_2s+\ldots+p_6s^5)=sP(s)$, et $G_{X_1}(s)=s(q_1+q_2s+\ldots+q_6s^5)=sQ(s)$, où P et Q sont des polynômes de degré 5 (à coefficients réels positifs, dont la somme vaut 1).
• Si c'était le cas, on aurait $G_S=G_{X_1+X_2}$.
Pour $s\in[0,1[$, c'est équivalent à $\dfrac{s^2}{11}\dfrac{1-s^{11}}{1-s}=s^2P(s)Q(s)$, ssi $1-s^{11}=11(1-s)P(s)Q(s)$, ssi $1-X^{11}=11(1-X)P(X)Q(X)$.
Cela est impossible car $1-X^{11}$ a une seule racine réelle qui est 1 et qui est simple, tandis que $11(1-X)P(X)Q(X)$ a plusieurs racines réelles (ou une double) car P et Q sont de degré 5 (degré impair).

Exercice 21. Soit $p\in]0,1[$. On fait un Pile ou Face avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce de façon indépendante, jusqu'à obtenir Pile une deuxième fois.
On note X la v.a. qui donne le nombre de Face obtenus pendant les lancers.
1. Déterminer la loi de probas de X.
2. Montrer que X est d'espérance finie, et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. On procède à l'expérience suivante :
Si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules dans une urne, numérotées de 0 à n.
Puis, on tire au hasard uniforme une boule de cette urne. On pose Y la v.a. associée au numéro obtenu.
Calculer $\mathbb{P}(Y=k)$, pour $k\in\mathbb{N}$.
Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z=X-Y$.
Donner la loi de probas de Z et vérifier que es v.a. Z et Y sont indépendantes.

---

1. L'événement $X=n$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $n+2$-ième tirage donne un face. Il y a donc $n+1$ choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire a une probabilité qui vaut $p^2(1-p)^n$. On a donc :
$$\mathbb{P}(X=n)=(n+1)p^2(1-p)^n.$$
2. La série définisant $\mathbb{E}(X)$ est convergente. On trouve :
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\mathbb{P}(X=n)=\frac{2(1-p)}{p}.$$
3. Si $n\geq 1$ est fixé, et $k\in\{0,\dots,n\}$, on a clairement :
$$\mathbb{P}(Y=k|X=n)=\frac{1}{n+1}.$$
Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k|X=n)\mathbb{P}(X=n)\\ &= \sum_{n=k}^{\infty}(n+1)p^2(1-p)^n\frac{1}{n+1}=p(1-p)^k.\end{aligned}$$

On reconnait que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. On a donc :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$

Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.

4. On a :

$$(Z=h) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \left[(Y=j) \cap (X=h+j)\right].$$

Cette réunion étant disjointe, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=h) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=j|X=h+j)\mathbb{P}(X=h+j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p^2(1-p)^{h+j} \\
&= p(1-p)^h.
\end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[(Z=h),(Y=j)] &= \mathbb{P}(X=h+j, Y=j) = \mathbb{P}(Y=j|X=h+j)\mathbb{P}(X=h+j) \\
&= p^2(1-p)^{h+j}.
\end{aligned}$$

Ceci est égal à $\mathbb{P}(Z=h)\mathbb{P}(Y=j)$. Les variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 22. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on place une puce en $(0,0)$.
La puce se déplace en sautant. Chaque saut est de longueur 1, dans l'une des 4 directions (haut, bas, gauche, droite), de façon uniforme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose M_n la v.a. qui donne la position de la puce après n sauts. On pose X_n, Y_n les v.a. coordonnées du point M_n.
On a donc $M_0 = (0,0)$ (fonction constante égale à $(0,0)$).
Toutes les v.a. sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$.
   On suppose que les variables aléatoires T_1, T_2, ... , T_n sont indépendantes.
   (a) Déterminer la loi de probas de T_n.
   Calculer $\mathbb{E}(T_n)$, et la variance de T_n.
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2,... , T_n.
   (c) Que vaut $\mathbb{E}(X_n)$?
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.
   (a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (b) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(Z_n) \leq \sqrt{n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.
   (a) Si n est impair, que vaut p_n ?
   (b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$).
   Etablir la relation :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$$

   On pourra utiliser la relation : $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.
4. Que dire de la série $\sum p_n$? Que peut-on en conclure ? On ne demande pas de preuve !

---

1. (a) On pose $U_n : \Omega \to \{H,B,G,D\}$ la v.a. associée à la direction du saut numéro n (haut, bas, gauche, droite). Alors U_n est une v.a. de loi de probas uniforme, et les U_k sont indépendantes.
   On a $\mathbb{P}(T_n=0) = \mathbb{P}(U_n = \{H,B\}) = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = D) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(U_n = G) = \frac{1}{4}$. D'où $\mathbb{E}(T_n) = 0$. Et $Var(T_n) = \frac{1}{2}$.
   (b) On a $X_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$
   (c) Par linéarité de l'espèrance on a $\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(T_n) = 0$.
   Par indépendance, les variances s'ajoutent : $Var(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n} Var(T_k) + Var(0) = \frac{n}{2}$.
2. (a) Non car si $X_n = 1$, alors $Y_n = 0$.
   (b) $\mathbb{E}(Z_n)^2 \leq \mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2 + Y_n^2) = n^2$.
3. (a) $X_n + Y_n$ est de même parité que n, donc $p_n = 0$.
   (b) Soit $0 \leq k \leq m$.
   On suppose qu'on fait k sauts à droite et donc k sauts à gauche, $m-k$ sauts en haut et $m-k$ sauts en bas, il faut les choisir parmi $2m$:

$$\binom{n}{k \quad n-k \quad k \quad n-k} = \frac{(2m)!}{(k!)^2(m-k)!^2} = \binom{2m}{m}\left[\binom{m}{k}\right]^2$$

   Comme chaque mouvement à une probabilité de $\frac{1}{4}$, on obtient le résultat demandé en sommant sur tous les k entre 0 et m.

4. La formule de Stirling nous dit que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ et donc

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi m}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{2\pi m\left(\frac{m}{e}\right)^n} = 2^{2m}$$

On en déduit que $p_n \sim \frac{1}{\pi n}$. La série est divergente. Ce qui singifie que la puce repasse une infinité de fois par $(0,0)$ presque sûrement !
Pour $A =$"la puce revient une infinité de fois en $(0,0)$, on va montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
Si on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (X_k, Y_k)$, alors on a $A = \limsup(S_n = (0,0))$.
Donc, on va montrer que $\mathbb{P}(\limsup(S_n = O)) = 1$ où $O = (0,0)$ est l'origine.
Dire que $\mathbb{P}(A) = 1$ équivaut à dire que $\mathbb{P}(B) = 0$ avec $B = A^c.B$ est l'événement : la suite ne passe qu'un nombre fini de fois en 0.
On peut partitionner cet événement en fonction de l'instant de dernier passage :

$$\begin{aligned} B &= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k \neq 0\} \\ &= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k - S_n \neq 0\} \\ &= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, S_n + i - S_n \neq 0\} \\ &= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq O\} \end{aligned}$$

Comme c'est une partition, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq O\}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\, \mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq 0\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $S_n = (X_1, Y_1) + \cdots + (X_n, Y_n)$ ne dépendant que des n premières variables, S_n est indépendante de $(X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i})$.
Mais, la probabilité $\mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq 0\right)$ ne dépend pas de n car les suites $((X_n, Y_n))_{n\geq 0}$ et $((X_n, Y_n))_{n>i}$ sont toutes deux des variables aléatoires indépendantes de même loi. Notons α cette probabilité, $\alpha = \mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) + \cdots + (X_i, Y_i) \neq 0\right)$ Nous avons donc d'une part que la série de terme général $\alpha\mathbb{P}(S_n = 0)$ converge (puisque c'est une série à termes positifs dont la limite vaut $\mathbb{P}(B)$). Mais par hypothèse, la série de terme général $\mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge. Nécessairement, α vaut zéro. Donc $\mathbb{P}(B) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 23. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète et positive.

1. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$

On pourra utiliser des fonctions indicatrices.

2. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$

On pourra utiliser la première question.

---

1. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$n\mathbb{1}_{n\leq X<n+1} \leq X\mathbb{1}_{n\leq X<n+1} \leq (n+1)\mathbb{1}_{n\leq X<n+1}.$$

L'espérance est croissante

$$n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) \leq \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{n\leq X<n+1}) \leq (n+1)\mathbb{P}(n \leq X < n+1).$$

et en sommant on obtient dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1)$$

ce qui montre que la somme de gauche est finie ssi l'espérance l'est.

2. Pour tout $n, k \geq 0$, on pose $a_{k,n} = \mathbb{P}(n \leq X < n+1)\mathbb{1}_{k<n}$ où $\mathbb{1}_{k<n}$ vaut 1 si $k < n$ et 0 sinon. En commençant à sommer sur k

$$\sum_{n\geq 0}\left(\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}((n \leq X < n+1)$$

et en commençant à sommer sur n

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n>k}\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\right) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X \geq k+1)$$

Comme les sommes sont à termes positifs l'une est finie ssi l'autre l'est. Avec la question 1, on obtient l'équivalence.

Théorèmes limites . . .

Exercice 24. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. discrètes. On suppose que les $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont de même loi de probas et sont indépendantes entre elles.

1. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge vers 0 en probabilité, c-à-d

$$\forall \varepsilon,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

2. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty)$, alors $\mathbb{E}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right|\right)$ converge vers 0. Étudier la réciproque.
3. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n} = 0\right) = 1$.

   Indication : Utiliser l'exercice précédent et le lemme de Borel-Cantelli.

---

1. Les X_n ayant même loi, on a
$$\mathbb{P}(\frac{|X_n|}{n} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\frac{|X_1|}{n} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\big(|X_1| \geq n\varepsilon\big) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
2. Si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty)$, alors
$$\mathbb{E}\left(\frac{|X_n|}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{|X_1|}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(|X_n|\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
   La réciproque est claire car la suite existe ssi $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$.
3. On suppose $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$. L'exercice précédent montre la série
$$\mathbb{P}(\frac{X_1}{\varepsilon} \geq n)$$
   converge et donc la série de terme générale $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\varepsilon} \geq n)$ converge et celle de terme générale $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\varepsilon} < n)$ diverge.

   Rappelons le lemme de Borel-Cantelli

   Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.
   (a) Si la série $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$
   (b) Si de plus la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est indépendante, alors
$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$
   On en déduit que
$$\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| < n\varepsilon\}) = 1$$
   car les variables sont indépendantes.

   On pose $A_k = \limsup\{|X_n| < \frac{n}{k}\}$ qui est une suite décroissante et donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}(A_k) = 1$$
   Mais $\bigcap_{k\geq 1} A_k = \{\lim \frac{|X_n|}{n} = 0\}$, d'où le résultat.

Exercice 25. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. discrètes réelles, et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète.
Montrer que si $(Y_n)_n$ convergence presque-sûrement vers Y, alors $(Y_n)_n$ convergence en probabilités vers Y.

Fixons $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de convergence presque sûre de Y_n vers Y signifie que l'événement
$$\Omega' := \left\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\right\}$$
a pour probabilité 1. Définissons
$$\Omega'_\varepsilon := \{\omega \in \Omega; \exists k_0 = k_0(\omega), \forall n \geq k_0, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\}$$
C'est bien un évènement (i.e. $\Omega'_c \in \mathcal{F}$) puisqu'il s'écrit
$$\Omega'_\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\geq k}\{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$$
De plus Ω'_ε contient Ω', donc $\mathbf{P}\left(\Omega'_c\right) = 1$. Pour tout $k \geq 1$, notons
$$A_k := \{\omega \in \Omega; \forall n \geq k, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\} = \bigcap_{n\geq k}\{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$$
La suite $(A_k)_{k\geq 1}$ est clairement croissante pour l'inclusion et sa réunion est Ω'_ε. Par continuité séquentielle croissante de $\mathbf{P}$, on a donc $\mathbf{P}\left(A_k\right) \uparrow \mathbf{P}\left(\Omega'_\varepsilon\right) = 1 (k \to +\infty)$. Par conséquent,
$$\forall \delta > 0, \exists k_1, \quad P\left(A_{k_1}\right) > 1 - \delta$$
Pour tout $n \geq k_1$, l'évènement $\{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$ contient A_{k_1}, d'où
$$\forall n \geq k_1, \quad \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$
et en passant à l'évènement complémentaire
$$\forall n \geq k_1, \quad \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right) < \delta$$
Ceci établit la convergence vers 0 de $\mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right)$. Comme ε était quelconque, on a bien convergence en probabilité de Y_n vers Y

Exercice 26.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de probas, et de carré intégrable.

   On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Montrer que $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. **Application**
   (a) On prend une urne avec 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire, sans remise, une boule dans cette urne, de façon aléatoire uniforme et indépendante.
   Pour $n \geq 1$, on pose Y_n la v.a. qui donne la couleur de la boule obtenue au tirage numéro n. (rouge=1, noire=0)
   Donner la loi de la v.a. Y_n.
   Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.
   (b) Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

---

1. Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :
   $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont mutuellement indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) > 0,95$.
   Or $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) = P\left(0,35 \leq \dfrac{S_n}{n} \leq 0,45\right) = P\left(-0,05 \leq \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leq 0,05\right)$
   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leq 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   On a donc $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq 0,05\right) \leq \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Donc $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) \geq 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geq 0,95$.
   La résolution de cette inéquation donne $n \geq \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geq 1920$.

Exercice 27. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$.

1. On pose $X = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.
   Montrer que $Var(X) \leq \frac{1}{4n}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'on a
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) \to_{n\to+\infty} 1$$

Soit $X = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. On a
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k \text{ et } \mathrm{Var}\, X = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} p_k(1-p_k).$$
Et comme $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ sur $[0,1]$, on obtient $\mathrm{Var}\,(X) \leq \dfrac{1}{4n}$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchabychev montre que
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}\, X}{\varepsilon^2}$$
et donc
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \sum_{k=1}^{n} p_k\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
et quand $n \to +\infty$ la quantité de droite tend bien vers 1.

Exercice 28. Une personne joue à un jeu de Pile ou Face équilibré ($p = 0.5$).
La première fois, elle mise 100 yuan.
Si la personne perd, elle rejoue et mise 200 yuan.
A chaque fois que la personne perd, elle rejoue et mise le double de la partie précédente.
Dès que la personne gagne, elle s'arrête de miser et garde son argent.
On note $X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ la v.a. qui indique l'argent de la après n parties de Pile ou Face.
On suppose que $X_0 = 100$. (Si la personne perd plusieurs fois, elle a une dette d'argent.)

1. Soit $n \geq 1$.
   Si le joueur a perdu n fois, combien vaut X_n ?
   Quelle est la probabilité qu'il perde n fois ?
2. Soit $n \geq 1$. Si le joueur perd $n-1$ fois puis gagne ensuite, combien vaut X_n ?
   Quelle est la probabilité de cet événement ?
3. En déduire l'ensemble image $X_n(\Omega)$, ainsi que la loi de probas de X_n.
4. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, pour tout $n \geq 1$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(X_n > 100) \to_{n \to +\infty} 1$.
   Ainsi, si la personne joue autant de fois qu'elle veut, elle repartira forcément gagnante.
6. Combien de fois la personne doit-elle jouer en moyenne pour repartir gagnante ?
7. On suppose maintenant que la personne ne peut pas s'endetter autant qu'elle veut. Si elle s'endette de plus de M yuan, pour $M > 0$, elle ne peut plus jouer et doit aller travailler pour payer sa dette.
   Dans cette situation, est-ce qu'il est intéressant pour elle de jouer au jeu ?

---

1. Quand le joueur perd la première fois, il perd 100 yuan. Puis, 200 yuan. Puis, 400 yuan.
   Donc, en perdant n fois, il perd au total $100 + 200 + 400 + ldots + 2^{n-1}.100$ yuan.
   On rappelle que $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$.
   Ainsi, on a $X_n(\omega) = 100 - (2^n - 1).100 = (2 - 2^n).100$.
   En supposant chaque Pile ou Face indépendant des autres, la probabilité de perdre n fois de suite est de $\frac{1}{2^n}$.
2. Si le joueur a perdu $n-1$ fois, on a $X_{n-1}(\omega) = (2 - 2^{n-1}).100$.
   Pour la partie suivante, le joueur mise $2^{n-1}.100$ yuan.
   S'il gagne, on a donc $X_n(\omega) = (2 - 2^{n-1}).100 + 2^{n-1}.100 = 200$. En supposant chaque Pile ou Face indépendant des autres, la probabilité de perdre $n-1$ fois de suite puis de gagner est de $\frac{1}{2^n}$.
   Si la personne gagne, elle repart avec 200 yuan, le double de son argent de départ.
3. Ainsi, pour $n \geq 1$ on a $X_n(\Omega) = \{(2 - 2^{n-1}).100, 200\}$.
   On a $\mathbb{P}(X_n = (2 - 2^{n-1}).100) = \frac{1}{2^n}$, donc $\mathbb{P}(X_n = 200) = 1 - \frac{1}{2^n}$.
4. On a alors $\mathbb{E}(X_n) = (2 - 2^{n-1}).100.\frac{1}{2^n} + 200.\frac{2^n-1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-2^{n-1}}{2^n}.100 = \frac{(2^2-1)}{2}.100 = 150$.
5. On a $\mathbb{P}(X_n > 100) = s\mathbb{P}(X_n = 200) = 1 - \frac{1}{2^n} to_{n \to +\infty} 1$.
6. On pose τ la v.a. qui indique le premier instant n où la personne obtient 200 yuan.
   En reprenant la question 2, on a alors $\mathbb{P}(\tau = n) = \frac{1}{2^n}$ si $n \geq 1$, et $\mathbb{P}(\tau = 0) = 0$.
   La v.a. τ est une v.a. de loi géométrique, de paramètre $\frac{1}{2}$.
   Donc, $\mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
   La personne joue en moyenne 2 fois avant de gagner.
7. Si la dette de la personne ne peut pas être infinie, il vaut mieux ne pas jouer.
   Supposons que $(2 - 2^{n+1}).100 < M < (2 - 2^n).100$, pour un certain $n \geq 2$.
   Cela veut dire que la personne peut perdre n fois de suite, mais que si elle perd une fois de plus (la $n+1$ ème fois) alors le jeu s'arrêtera et elle aura une dette de $(2 - 2^{n+1}.100$ yuan à rembourser.
   La personne a donc une probabilité de $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ de repartir gagnante avec 200 yuan (gagner 100 yuan grâce au jeu), et une probabilité de $\frac{1}{2^{n+1}}$ de tout perdre et d'avoir une dette de $\sim -2^{n+1}.100$ yuan.
   Pour $n = 11$, on a $2^{n+1} = 8192$, donc cela représenterait déjà une dette de ~ -819200 yuan.
   Il ne faut pas jouer à ce jeu, on a une grande probabilité de gagner peu et une petite probabilité de perdre énormément. C'est à nouveau un cas de variable aléatoire où l'espérance est petite mais où la variance est extrêmement grande (cela indique que le résultat peut parfois s'éloigner énormément de la valeur moyenne).